Baden-Württemberg

Schriftliche Abiturprüfung
für Schulfremde
und an Freien Waldorfschulen
im Basisfach **Mathematik**

2021 und 2022

Beispielaufgabe

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Abiturprüfung für Schulfremde und an Freien Waldorfschulen

Prüfungsfach: **M a t h e m a t i k (Basisfach)**

Beispielaufgabe 2021 **<u>Pflichtteil</u>** (Beispiel 1)

Aufgabe 1

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = 3 - 2\sin(x)$.

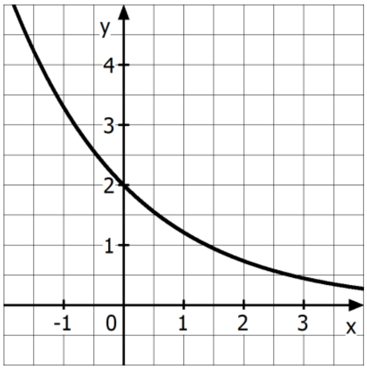
a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(0\,|\,f(0))$.

b) Geben Sie den Wertebereich von f an.

(2,5 VP)

Aufgabe 2

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$. Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = -e^{-\frac{1}{2}x}$.



a) Bestimmen Sie rechnerisch die Stelle, an der die Tangente des Graphen von f parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -x$ verläuft.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, den Koordinatenachsen und der Gerade mit der Gleichung $x = 2$ begrenzt wird.

(2,5 VP)

Aufgabe 3

Für jeden Wert von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bilden die Punkte $A(7\,|\,3\,|\,0)$, $B(5\,|\,3\,|\,4)$ und $C_t(5+2t\,|\,3\,|\,4+t)$ ein Dreieck.

a) Zeigen Sie, dass jedes dieser Dreiecke bei B einen rechten Winkel hat.

b) Bestimmen Sie alle Werte von t, für die im jeweiligen Dreieck ABC_t zwei Innenwinkel gleich groß sind.

(2,5 VP)

Aufgabe 4

Gegeben sind die Punkte $A(1|1|-1)$, $B(3|-5|2)$ und C. Für die Ortsvektoren von A und C gilt $\overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OA}$.

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke AC.

b) Begründen Sie, dass es genau eine Ebene gibt, die A, B und C sowie den Koordinatenursprung enthält.

(2,5 VP)

Aufgabe 5

In einem Zuchtbetrieb soll das Gewicht von Jungfischen näherungsweise durch die normalverteilte Zufallsgröße X modelliert werden. Dabei beschreibt X das Gewicht eines Fisches in Gramm. Der Erwartungswert von X ist $\mu = 8$ g und die Standardabweichung ist $\sigma = 2$ g.

Die folgenden Abbildungen zeigen Glockenkurven normalverteilter Zufallsgrößen.

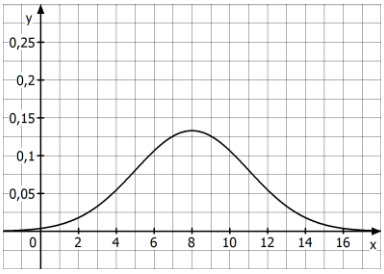


Abb. 1

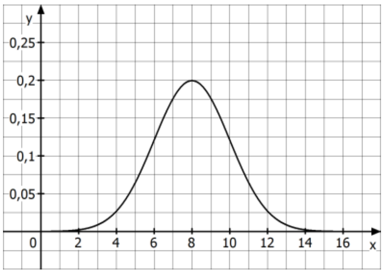


Abb. 2

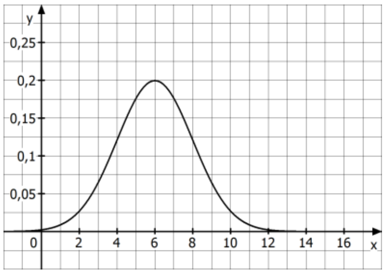


Abb. 3

a) Begründen Sie, dass nur die Abbildung 2 die Glockenkurve der Zufallsgröße X wiedergibt.

b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gewicht eines zufällig entnommenen Jungfisches kleiner als vier Gramm ist, beträgt nach dem Modell etwa 0,023. Bestimmen Sie, wie groß nach diesem Modell die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein zufällig entnommener Fisch zwischen vier und acht Gramm wiegt.

(2,5 VP)

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x+1$ und $x\in\mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Punkte, in denen der Graph von f die Gerade mit der Gleichung $y=1$ schneidet.

b) Unter den Tangenten an den Graphen von f hat eine die kleinste Steigung. Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

(2,5 VP)

Aufgabe 2

Gegeben ist die in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{x^2}+1$.

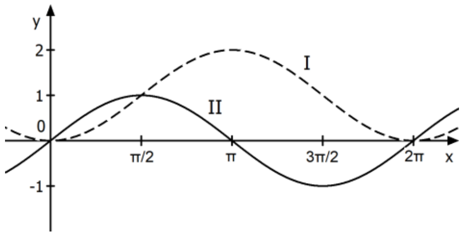
a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Der Graph von f schließt mit der Gerade mit der Gleichung $y=1$ sowie den Geraden mit den Gleichungen $x=1$ und $x=2$ ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

(2,5 VP)

Aufgabe 3

a) Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion und deren erster Ableitungsfunktion.



Geben Sie an, welcher der beiden Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt, und begründen Sie Ihre Angabe.

b) Für einen Wert von k mit $k\in\mathbb{R}$, $k>0$, wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=k\cdot\sin(x)$ betrachtet. Für $0\le x\le\pi$ schließt der Graph von f mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt $\frac{1}{2}$ ein. Bestimmen Sie den Wert von k.

(2,5 VP)

Aufgabe 4

Gegeben sind die Punkte $A(-2\,|\,1\,|\,-2)$, $B(1\,|\,2\,|\,-1)$, $C(1\,|\,1\,|\,4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d\,|\,1\,|\,4)$.

a) Zeigen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind, und geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der dieses Dreieck liegt.

b) Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig. Ermitteln Sie den Wert von d.

(2,5 VP)

Aufgabe 5

Bei einem Spiel gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % einen Zitronenbonbon und mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % einen Orangenbonbon.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man keinen Gewinn erzielt, beträgt 20 %.

a) Eine Person nimmt zehnmal an dem Spiel teil. Geben Sie dazu ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term

$$\binom{10}{7} \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3$$

berechnet werden kann.

b) Eine andere Person gewinnt sechs Bonbons. Sie wählt zwei dieser Bonbons zufällig aus und verschenkt sie. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie einen Zitronenbonbon und einen Orangenbonbon verschenkt, beträgt $\frac{3}{5}$. Ermitteln Sie, wie viele Orangenbonbons diese Person gewonnen hat.

(2,5 VP)

Aufgabe A 1.1

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8} \cdot \left(x^3 - 15x^2 + 50x\right)$.

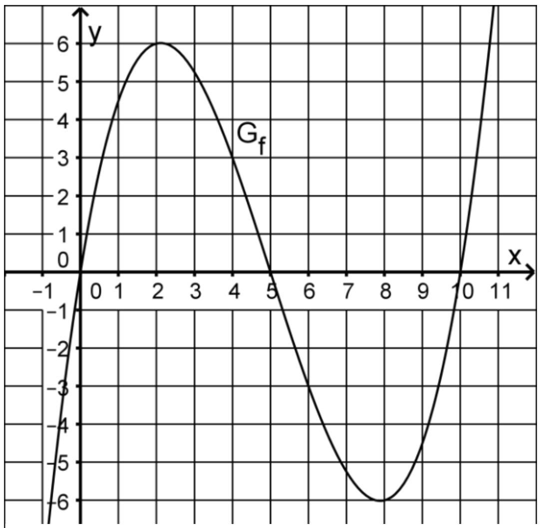


Abb. 1

a) Zeigen Sie, dass G_f im Punkt $W(5\,|\,0)$ einen Wendpunkt besitzt, und ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.

(3 VP)

b) Berechnen Sie $\int_0^5 f(x)\,dx$.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass

$\int_0^8 f(x)\,dx < \int_0^5 f(x)\,dx$

gilt.

(3 VP)

c) Betrachtet wird das Dreieck ABC mit $A(0\,|\,0)$, $B(4\,|\,0)$ und $C(4\,|\,f(4))$.
Rotiert dieses Dreieck um seine Seite AB, so entsteht ein Körper.
Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche dieses Körpers.

(2 VP)

d) Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h.
Abbildung 2 stellt $h(x) - f(x)$ in Abhängigkeit von x dar.
Beschreiben Sie für $x \in [0;5]$ die gegenseitige Lage der Graphen von f und h.
Gehen Sie dabei – für den genannten Bereich – auf die Bedeutung der Schnittpunkte des abgebildeten Graphen mit der x-Achse und auf die Bedeutung der x-Koordinate des Tiefpunkts dieses Graphen ein.

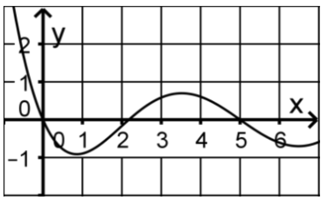


Abb. 2

(2 VP)

Aufgabe A 1.2

Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion K mit $K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0;9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen.
Die Abbildung 3 in der Anlage zeigt den Graphen von K.

a) Geben Sie mithilfe der Abbildung 3 die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen.
Geben Sie mithilfe der Abbildung 3 eine Minimumstelle der Ableitungsfunktion von K an.
Geben Sie das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

(2 VP)

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \leq x \leq 9$ den Erlös (in 1000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

b) Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.

(1 VP)

c) Zeichnen Sie den Graphen von E in Abbildung 3 ein.
Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.

(2 VP)

d) Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.

(2,5 VP)

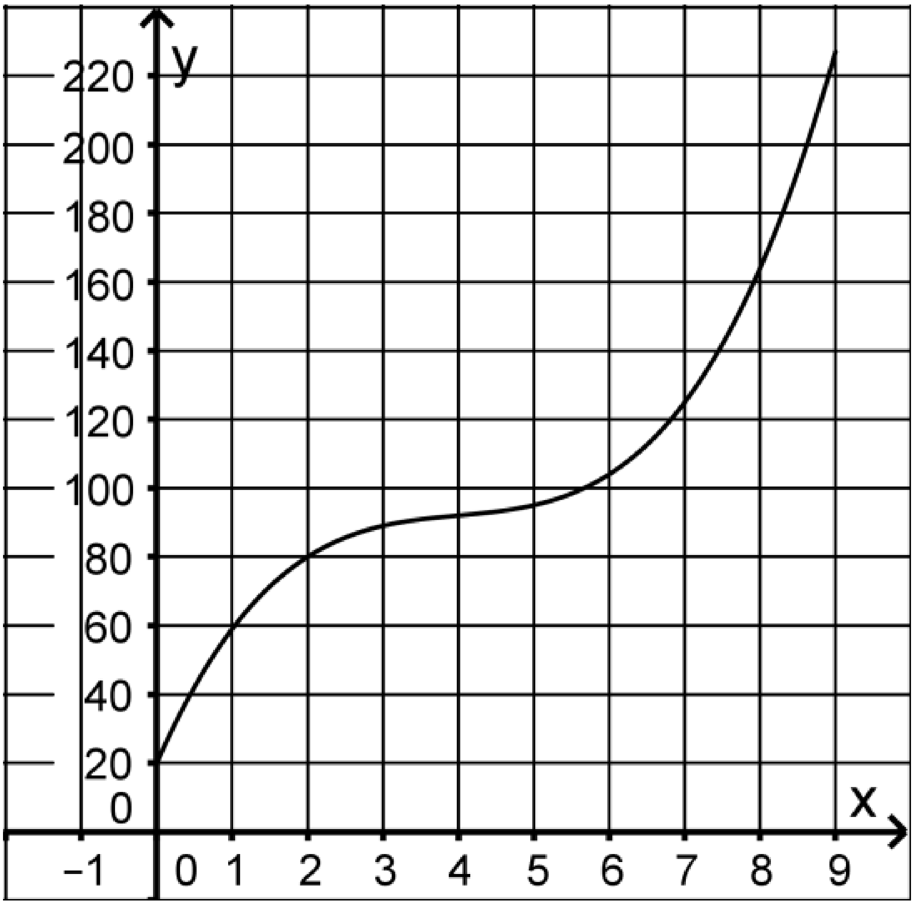
Zu- und Vorname: ______________________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: ______________________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung 3 zu Aufgabe A 1.2



Aufgabe A 2.1

In einer Senke verläuft ein Fluss. Die Abbildung 1 in der Anlage zeigt modellhaft einen Querschnitt der Senke und der beiden horizontalen Uferzonen.
Im Querschnitt kann die Profillinie der Senke modellhaft durch die Funktion f mit $f(x) = -5x^2e^x + 1$ und $x \in [-6; 0]$ beschrieben werden. Die Wasseroberfläche wird im Modell durch einen Abschnitt der x-Achse dargestellt, die Uferzonen durch zwei Strecken, die jeweils parallel zur x Achse verlaufen und lückenlos an den Graphen von f anschließen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.
Zur Funktion f sind Gleichungen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion sowie einer Stammfunktion gegeben:

- $f'(x) = -5x \cdot (2 + x) \cdot e^x$
- $f''(x) = -10e^x - 20xe^x - 5x^2e^x$
- $F(x) = x - 5 \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^x$

a) Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen den beiden Uferzonen.
Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1, wie breit die Senke einen Meter unterhalb der Wasseroberfläche ist.
Deuten Sie die Gleichung $f(x + 3) = f(x)$ im Sachzusammenhang und bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 1 eine Lösung der Gleichung.

(3,5 VP)

b) Leiten Sie aus der Funktionsgleichung von f die angegebene Funktionsgleichung von f' her.
Berechnen Sie die Tiefe des Wassers an der tiefsten Stelle der Senke.

(3,5 VP)

Über die Senke soll eine Brücke gebaut werden. Das eine Ende der Brücke soll auf der linken Uferzone aufliegen, das andere Ende auf einem Sockel am rechten Ufer.
Die Profillinie der Brücke wird im Modell durch eine Strecke dargestellt, der Auflagepunkt am rechten Ufer durch den Punkt $B(0\,|\,1{,}1)$.

c) Berechnen Sie die Länge der Brücke sowie deren Steigung in Prozent, wenn der linke Auflagepunkt im Modell durch den Punkt $A(-6\,|\,f(-6))$ dargestellt würde.
Ermitteln Sie, wie weit das linke Ende der Brücke vom Rand der Senke entfernt läge, wenn die Brücke eine Steigung von 6 % hätte.

(3,5 VP)

d) Das Produkt aus dem Flächeninhalt des Flussquerschnitts (in m^2) und der Fließgeschwindigkeit des Wassers (in $\frac{m}{s}$) wird als Durchflussrate bezeichnet.
Die Fließgeschwindigkeit des Wassers beträgt $0{,}5\,\frac{m}{s}$. Der Abschnitt der x-Achse, der die Wasseroberfläche im Modell darstellt, wird näherungsweise durch $x \approx -4{,}7$ und $x \approx -0{,}6$ begrenzt.
Berechnen Sie die Durchflussrate.

(2,5 VP)

Aufgabe A 2.2

Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion g vierten Grades.

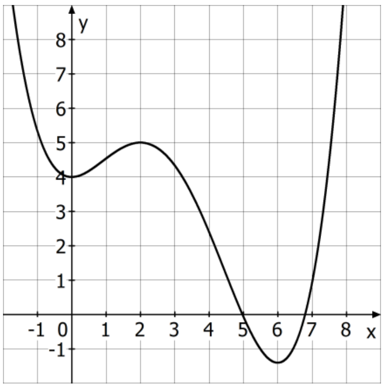


Abb. 2

a) Begründen Sie, dass der Graph von g außerhalb des abgebildeten Bereichs keine Extrempunkte besitzt.
Betrachtet wird die Gleichung $g(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$.
Geben Sie alle Werte von a an, für die die Gleichung genau drei Lösungen hat.

(2,5 VP)

b) Untersuchen Sie, ob der Wert des Terms $g'(3) \cdot g''(3)$ positiv ist.

(2 VP)

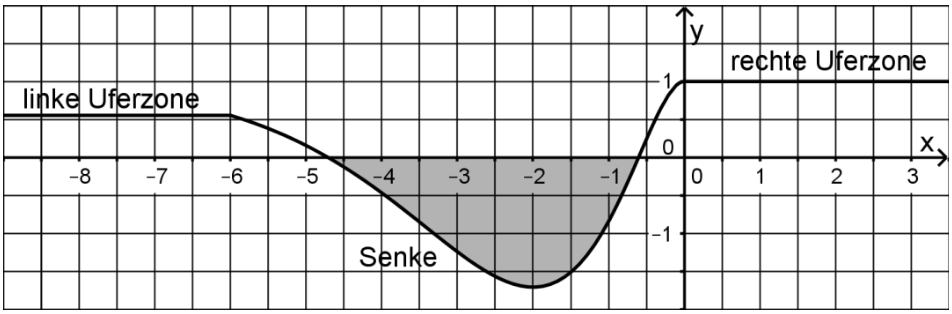
Zu- und Vorname: ______________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: ______________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung 1 zu Aufgabe A 2.1



Aufgabe B 1

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide ABCDS mit $A(0|0|0)$, $B(5|0|0)$, $C(5|5|0)$ und $D(0|5|0)$ sowie der Spitze $S(2{,}5|2{,}5|3{,}9)$ gegeben.

a) Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.
Begründen Sie ohne Verwendung von Vektoren, dass die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat ist.
Bestimmen Sie den Inhalt einer Seitenfläche der Pyramide.
Die Punkte A, B und S liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels einer Seitenfläche der Pyramide gegenüber ihrer Grundfläche.

(6 VP)

Die Pyramide stellt modellhaft ein geschlossenes Zelt dar, das auf horizontalem Untergrund steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

b) Auf das Zelt treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -12{,}5 \\ -3{,}9 \end{pmatrix}$ beschreiben.
Zu diesem Zeitpunkt trifft Sonnenlicht durch ein kleines Loch in einer Zeltwand genau auf den Eckpunkt des Zeltbodens, der durch den Punkt B beschrieben wird.
Der Punkt $L(x_L|y_L|1{,}3)$ stellt das Loch in der Zeltwand dar.
Bestimmen Sie die Werte von x_L und y_L.

(1,5 VP)

c) Auf einem Teil des Zeltbodens hat ein 1,20 m großes Kind die Möglichkeit, aufrecht zu stehen.
Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells den Anteil des Flächeninhalts dieses Teils am Flächeninhalt des gesamten Zeltbodens.
Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen anhand einer geeignet beschrifteten Skizze.

(2,5 VP)

Aufgabe B 2

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $G(5\,|\,5\,|\,5)$ und $H(0\,|\,5\,|\,5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Punkte $I(5\,|\,0\,|\,1)$, $J(2\,|\,5\,|\,0)$, $K(0\,|\,5\,|\,2)$ und $L(1\,|\,0\,|\,5)$ liegen jeweils auf einer Kante des Würfels.

a) Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein.
Zeigen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.
Weisen Sie nach, dass die Seite IL des Trapezes doppelt so lang ist wie die Seite JK.
Berechnen Sie die Größe eines Innenwinkels des Trapezes IJKL.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes IJKL.

(6 VP)

b) Gegeben ist die Ebene $S: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0$. Der Punkt K liegt in einer Ebene T, die parallel zu S ist.
Untersuchen Sie, ob auch der Punkt L in T liegt.

(1,5 VP)

c) Für einen Wert von r schneidet die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4-r \\ 0 \\ r^2+1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } u \in \mathbb{R}$$

die Kante GH des Würfels.
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem der Schnittpunkt die Kante teilt.

(2,5 VP)

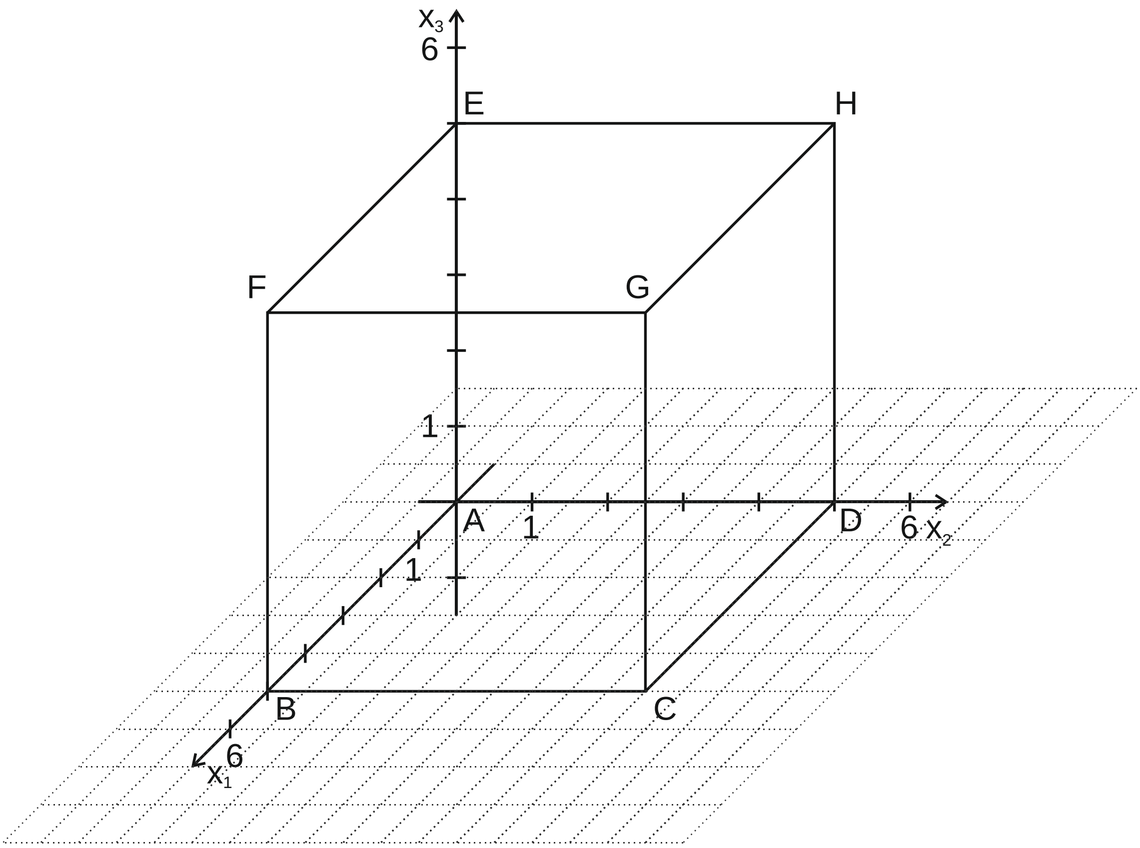
Zu- und Vorname: ____________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: ____________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe B 2



Aufgabe C 1.1

20 % aller Pkw eines bestimmten Herstellers sind Dieselfahrzeuge. Die Anzahl der Dieselfahrzeuge in einer Stichprobe soll modellhaft als binomialverteilt angenommen werden. 25 Pkw des Herstellers werden zufällig ausgewählt; davon sind drei rot.

a) Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Unter den ausgewählten Pkw sind genau acht Dieselfahrzeuge."
B: „Unter den ausgewählten Pkw sind mindestens fünf Dieselfahrzeuge."

(1,5 VP)

b) Von den ausgewählten Pkw sind genau fünf Dieselfahrzeuge.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei roten Pkw Dieselfahrzeuge sind.

(1,5 VP)

c) Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl zufällig ausgewählter Pkw des Herstellers mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter diesen mindestens ein Dieselfahrzeug ist, mindestens 95 % beträgt.

(2 VP)

d) 80 % der Dieselfahrzeuge und 90 % der übrigen Pkw des Herstellers haben eine Leistung von mehr als 60 kW.
Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Leistung eines zufällig ausgewählten Pkw des Herstellers größer als 60 kW ist.

(2 VP)

Aufgabe C 1.2

Betrachtet werden binomialverteilte Zufallsgrößen, die für eine Trefferwahrscheinlichkeit p mit $0 \leq p \leq 1$ die Anzahl der Treffer bei n Versuchen angeben. Die Standardabweichung der Zufallsgrößen ist 3.

Bestimmen Sie für eine Zufallsgröße mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von 25 % die zugehörige Anzahl der Versuche.
Begründen Sie, dass es keinen Wert von p geben kann, für den die Anzahl der Versuche 9 ist.

(3 VP)

Aufgabe C 2

In einer Urne befinden sich Kugeln. 35 % der Kugeln sind mit „+1“ beschriftet, 25 % mit „+2 “, die übrigen mit „–3“.

a) 100-mal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Mehr als 35 der entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“
B: „Die ersten drei entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“

(2 VP)

b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der in der Urne insgesamt enthaltenen Kugeln kleiner als 100 sein kann.

(1 VP)

Unter Verwendung der Urne wird ein Spiel durchgeführt. Dabei wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zahlen auf den entnommenen Kugeln werden addiert. Ist das Ergebnis positiv, gewinnt der Spieler den Wert der Summe als Betrag in Euro, ist das Ergebnis negativ, verliert er den entsprechenden Betrag.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel mehr als 3 Euro gewinnt.
Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel einen Gewinn erzielt, 36 % beträgt.
Ermitteln Sie für einen Spieler mithilfe eines Baumdiagramms den durchschnittlichen Verlust pro Spiel.

(4,5 VP)

Die Anzahl der in der Urne tatsächlich enthaltenen Kugeln ist n. In die Urne werden zwei zusätzliche Kugeln gelegt, eine davon ist mit „+1“ beschriftet, die andere mit „+2“. Anschließend wird eine Kugel zufällig entnommen.

d) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, durch den Term $\frac{0{,}35n+1}{n+2}$ angegeben wird.
Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, nach dem Hinzufügen größer ist als vorher.

(2,5 VP)

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer
Die Lösungshinweise erheben nicht den Anspruch, die einzigen oder kürzesten Lösungswege aufzuzeigen.
Sie sollen unter anderem eine Orientierungshilfe bei der Auswahl der Aufgaben durch die Fachlehrerin oder den Fachlehrer sein. Maßgebend für die Korrektur ist allein der Aufgabentext und jede nach diesem Text mögliche Lösung.

<u>Zum Pflichtteil</u> <u>(Beispiel 1)</u>

Aufgabe 1

a) $f'(x) = -2\cos(x)$, $f'(0) = -2$, $f(0) = 3$, Gleichung der Tangente: $y = -2x + 3$ (1,5 VP)

b) $W = [1;5]$ (1 VP)

Aufgabe 2

a) $-e^{-\frac{1}{2}x} = -1 \Leftrightarrow x = 0$ (1 VP)

b) $\int_0^2 2e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \left[-4e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2 = 4 - \frac{4}{e}$ (1,5 VP)

Aufgabe 3

a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC_t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = 4t - 4t = 0$ (1 VP)

b) Der Ansatz $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC_t}|$ führt auf die Gleichung $\sqrt{20} = \sqrt{5t^2}$ mit den Lösungen $t_1 = 2$ und $t_2 = -2$. (1,5 VP)

Aufgabe 4

a) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{3}$ (1 VP)

b) Wegen $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$ liegen A und C auf einer Geraden g, die auch den Ursprung enthält. Da B nicht auf dieser Geraden liegt, wird durch B und g eindeutig eine Ebene bestimmt. (1,5 VP)

Aufgabe 5

a) Die Glockenkurve der Verteilung von X hat einen Hochpunkt mit der x-Koordinate $x_H = \mu = 8$ und einen Wendepunkt mit der x-Koordinate $x_W = \mu + \sigma = 10$, was nur bei Abb. 2 gegeben ist. (1 VP)

b) $P(4 < X < 8) = P(X < 8) - P(X \le 4) \approx 0{,}5 - 0{,}023 = 0{,}477$ (1,5 VP)

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer

<u>Zum Pflichtteil</u> <u>(Beispiel 2)</u>

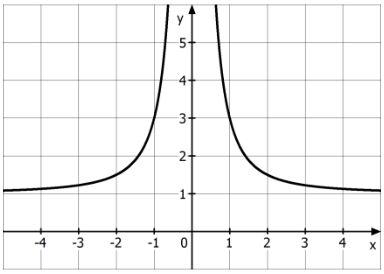
Aufgabe 1

a) $f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x+1=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x\cdot(x^2-4)=0$, somit $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-2$ (1 VP)

b) Das Minimum der Ableitung f‘ mit $f'(x)=x^2-\frac{4}{3}$ ist $-\frac{4}{3}$, somit hat die gesuchte Tangente die Steigung $-\frac{4}{3}$. (1,5 VP)

Aufgabe 2

a) Skizze siehe rechts (1 VP)



b) $A=\int_1^2 \left(f(x)-1\right)dx=\int_1^2 \frac{2}{x^2}dx=\left[-\frac{2}{x}\right]_1^2=1$ (1,5 VP)

Aufgabe 3

a) Die in Graph II dargestellte Funktion besitzt genau an den Stellen Vorzeichenwechsel, an denen Graph I Extrempunkte besitzt. Somit stellt Graph II die Ableitungsfunktion dar. (1 VP)

b) $\int_0^{\pi} k\cdot\sin(x)\,dx=k\cdot\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi}=2k,\ \ 2k=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=\frac{1}{4}$ (1,5 VP)

Aufgabe 4

a) Die Vektoren $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}$ sind keine Vielfachen voneinander, daher liegen A, B und C nicht auf einer Geraden und sind somit die Eckpunkte eines Dreiecks.

$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix},\ r,s\in\mathbb{R}$ (1,5 VP)

b) $\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}d-1\\-1\\5\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=0\ \Leftrightarrow\ -3(d-1)+1-5=0\ \Leftrightarrow d=-\frac{1}{3}$ (1 VP)

Aufgabe 5

a) „Die Person gewinnt genau sieben Bonbons.“ (0,5 VP)

b) Beschreibt k die Anzahl der gewonnenen Orangenbonbons, so ergibt sich die Gleichung $2\cdot\frac{k}{6}\cdot\frac{6-k}{5}=\frac{3}{5}$ mit der Lösung $k=3$. Die Person hat 3 Orangenbonbons gewonnen. (2 VP)

Zum Wahlteil

Aufgabe A 1.1

a) Nachweis Wendepunkt (2 VP)

$f'(x) = \frac{1}{8} \cdot \left(3x^2 - 30x + 50\right)$, $f''(x) = \frac{1}{8} \cdot \left(6x - 30\right)$, $f'''(x) = \frac{3}{4}$

$f(5) = 0$, $f''(5) = 0$, $f'''(5) \neq 0$, woraus die Behauptung folgt.

Gleichung der Tangente (1 VP)

$y = f'(5) \cdot (x - 5) + f(5) = -\frac{25}{8}x + \frac{125}{8}$

b) Integral (1,5 VP)

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 25x^2\right]_0^5 = \frac{625}{32}$$

Begründung (1,5 VP)

Die Funktion nimmt für $5 < x < 8$ nur negative Werte an.

Deshalb ist $\int_0^8 f(x)\,dx < \int_0^5 f(x)\,dx$.

c) Oberfläche (2VP)

Der entstehende Körper ist ein Kreiskegel mit Grundkreisradius $r = f(4) = 3$ und Höhe $h = 4$. Sein Oberflächeninhalt beträgt $O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = 24\pi$.

d) Beschreibung (2 VP)

Die Graphen von f und h schneiden sich an den Stellen, an welchen der abgebildete Graph die x-Achse schneidet. Zwischen den Schnittstellen $x = 0$ und $x \approx 2{,}2$ verläuft der Graph von h unterhalb, zwischen den Schnittstellen $x \approx 2{,}2$ und $x = 5$ oberhalb des Graphen von f. Die x-Koordinate des Tiefpunktes des gezeigten Graphen kennzeichnet den größten vertikalen Abstand der Graphen von f und h.

Aufgabe A 1.2

a) Produktionsmenge (0,5 VP)

Gesuchte Produktionsmenge beträgt etwa 7 m^3.

Minimumstelle der Ableitung (0,5 VP)

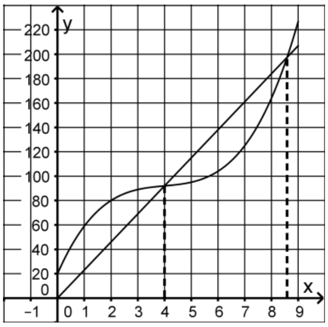
$x \approx 4$

Monotonieverhalten und Deutung (1 VP)

K ist streng monoton wachsend. Das bedeutet, dass die Produktionskosten mit steigender Produktionsmenge steigen.

b) Nachweis (1 VP)
$G(4) = E(4) - K(4) = 92 - 92 = 0$

c) Darstellung (0,5 VP)
siehe Abbildung rechts



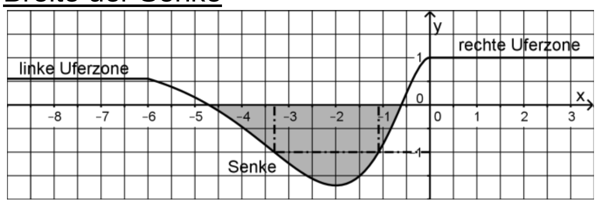
Gewinnbereich (1,5 VP)
Die Menge der verkauften Flüssigkeit muss zwischen 4 m^3 und etwa 8,6 m^3 liegen.

d) Menge für größten Gewinn (2,5 VP)
$G(x) = -x^3 + 12x^2 - 27x - 20$, $G'(x) = -3x^2 + 24x - 27$
Die Gleichung $G'(x) = 0$ hat die Lösungen $x_1 \approx 6,65$ und $x_2 \approx 1,35$ (irrelevant). Es müssen etwa 6,65 m^3 verkauft werden.

Aufgabe A 2.1

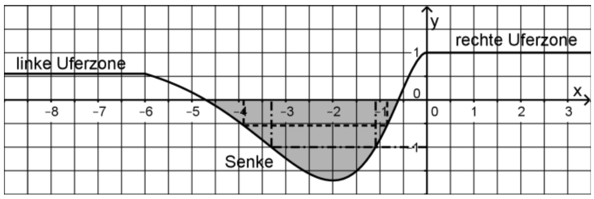
a) Höhenunterschied (1 VP)
$f(0) - f(-6) \approx 0,45$, somit beträgt der Höhenunterschied etwa 0,45 m.

Breite der Senke (1 VP)



Einen Meter unter der Wasseroberfläche ist die Senke etwa 2,2 m breit.

Deutung der Gleichung und Lösung (1,5 VP)



Die Lösung der Gleichung beschreibt, wo die Senke 3 m breit ist.
Die Lösung der Gleichung ist $x \approx -3,9$.

b) Funktionsgleichung von f‘ (1,5 VP)
$f'(x) = -10xe^x - 5x^2e^x = -5x \cdot (2 + x) \cdot e^x$

Wassertiefe (2 VP)
$f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$ (irrelevant) und $x_2 = -2$, $f(-2) \approx -1,71$
An der tiefsten Stelle ist das Wasser etwa 1,71 m tief.

c) Länge der Brücke (0,5 VP)
$l = \sqrt{(0+6)^2 + (1,1 - f(-6))^2} \approx 6,02$. Die Brücke ist etwa 6,02 m lang.

Steigung (1VP)

$\frac{1{,}1-f(-6)}{0-(-6)} \approx 0{,}09$, die prozentuale Steigung beträgt etwa 9 %.

Entfernung zum Rand (2 VP)

Der Ansatz $\frac{1{,}1-f(-6)}{0-a} = 0{,}06$ liefert $a \approx -9{,}10$.

Das Ende der Brücke ist etwa 3,10 m vom Rand der Senke entfernt.

d) Durchflussrate (2,5 VP)

$$0{,}5 \cdot \left| \int_{-4,7}^{-0,6} f(x)\,dx \right| = 0{,}5 \cdot \left| \left[x - 5 \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^x \right]_{-4,7}^{-0,6} \right| \approx 2{,}07$$

Die Durchflussrate beträgt etwa 2,07 Kubikmeter pro Sekunde.

Aufgabe A 2.2

a) Begründung (1,5 VP)

Eine ganzrationale Funktion vierten Grades besitzt höchstens drei Extremstellen.
Da im dargestellten Bereich bereits drei Extremstellen liegen, besitzt g keine weiteren Extremstellen außerhalb dieses Bereichs.

Werte von a (1 VP)

$a_1 = 4$ und $a_2 = 5$

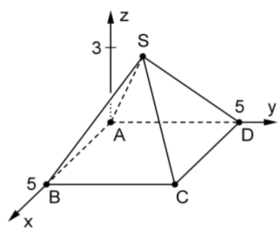
b) Untersuchung (2 VP)

Aus der Abbildung lässt sich $g'(3) < 0$ erkennen. Da der Graph von g an der Stelle $x = 3$ rechtsgekrümmt ist, gilt $g''(3) < 0$. Somit ist der Wert des Terms positiv.

Aufgabe B 1

a) Zeichnung (1,5 VP)

siehe rechts



Begründung (1 VP)

Alle Seiten sind parallel und gleich lang. Da A im Ursprung und B und D auf den Koordinatenachsen liegen, hat das Viereck auch vier rechte Winkel.

Flächeninhalt (1 VP)

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{M_{AB}S}| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{2{,}5^2 + 3{,}9^2} \approx 11{,}6$$

<u>Gleichung von E</u> (1,5 VP)

Aus $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 3,9 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3,9 \\ -2,5 \end{pmatrix}$.

Mit $A \in E$ erhält man $E: 3,9x_2 - 2,5x_3 = 0$.

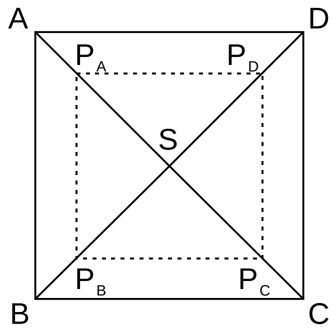
<u>Neigungswinkel</u> (1 VP)

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3,9 \\ -2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3,9 \\ -2,5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2,5}{\sqrt{3,9^2 + 2,5^2}}, \quad \alpha \approx 57,3°$$

b) <u>Koordinaten von L</u> (1,5 VP)

Aus $\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ 1,3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ -12,5 \\ -3,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $t = \frac{1}{3}$, somit $x_L = 5 - \frac{1}{3} \cdot 7,5 = 2,5$ und $y_L = \frac{1}{3} \cdot 12,5 \approx 4,2$.

c) <u>Anteil</u> (2,5 VP)



Die Ebene $F: x_3 = 1,2$ schneidet die Gerade $AS: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 3,9 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

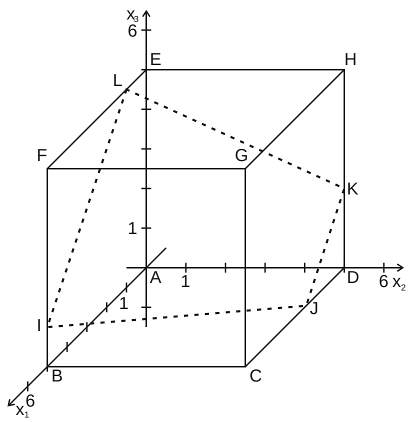
in $P_A(\frac{10}{13} \mid \frac{10}{13} \mid \frac{12}{10})$. Ebenso ergeben sich der Punkt $P_B(5 - \frac{10}{13} \mid \frac{10}{13} \mid \frac{12}{10})$ und die Punkte P_C und P_D auf den anderen Kanten der Pyramide.

Die Punkte P_A, P_B, P_c und P_D sind die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $|\overrightarrow{P_AP_B}| = \frac{45}{13}$. Somit ergibt sich als Anteil $\frac{\left(\frac{45}{13}\right)^2}{5^2} \approx 48\,\%$.

Aufgabe B 2

a) <u>Zeichnung</u> (1 VP)

siehe rechts



<u>Nachweis 1</u> (1,5 VP)

$\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{IL}$, somit sind zwei Seiten parallel und das Viereck ein Trapez.

$|\overrightarrow{KL}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{35}$, $|\overrightarrow{JI}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{35}$, somit sind zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang.

Nachweis 2 (0,5 VP)

$\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{IL}$, somit ist $\overrightarrow{IL}$ doppelt so lang wie $\overrightarrow{JK}$.

Innenwinkel (1 VP)

Innenwinkel mit Scheitel L:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LK}}{|\overrightarrow{LI}| \cdot |\overrightarrow{LK}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{35}} = \frac{8}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{35}}, \ \alpha \approx 76{,}2^\circ$$

Flächeninhalt (2 VP)

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot \left(|\overrightarrow{IL}| + |\overrightarrow{JK}|\right) \cdot h \text{ mit } h = |\overrightarrow{M_{IL}M_{JK}}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{33}, \text{ somit}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{32} + \sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{33} = 3\sqrt{66}$$

b) Untersuchung (1,5 VP)

$$T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \overset{K \in T}{=} 5 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 30$$

Punktprobe mit L ergibt $5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 30$, somit liegt L ebenfalls in T.

c) Verhältnis (2,5 VP)

$\overline{GH}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0;1]$, $\overline{GH} \cap g$ führt auf $\begin{pmatrix} 4-r \\ 0 \\ r^2+1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Daraus folgt $u = -1$, $r_1 = 2$ und $r_2 = -2$.

Für $r_1 = 2$ ergibt sich $t = \frac{7}{5}$ (irrelevant), für $r_2 = -2$ ergibt sich $t = \frac{3}{5}$.

Die Kante wird also im Verhältnis $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 3 : 2$ geteilt.

Aufgabe C 1.1

a) X: Anzahl der Dieselfahrzeuge unter den ausgewählten PKW, X ist $B_{25;0,2}$ -verteilt.

Wahrscheinlichkeit Ereignis A (0,5 VP)

$P(X=8)\approx 0{,}062$

Wahrscheinlichkeit Ereignis B (1 VP)

$P(X\geq 5)=1-P(X\leq 4)\approx 0{,}579$

b) Wahrscheinlichkeit (1,5 VP)

$p=\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}\cdot\frac{3}{23}=\frac{1}{230}$

c) Mindestanzahl (2 VP)

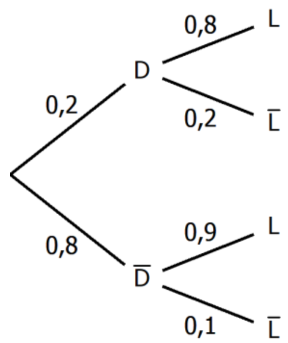
Y: Anzahl der der Dieselfahrzeuge unter den ausgewählten PKW. Y ist binomialverteilt mit $p=0{,}2$ und unbekanntem n. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $P(Y\geq 1)\geq 0{,}95$, also $P(Y=0)\leq 0{,}05$

Für $n=13$ ist $P(Y=0)\approx 0{,}055$, für $n=14$ ist $P(Y=0)\approx 0{,}044$.

Es müssen mindestens 14 Fahrzeuge ausgewählt werden.

d) Baumdiagramm (1 VP)

siehe rechts (D: Dieselfahrzeug, L: mehr als 60 kW)



Wahrscheinlichkeit (1 VP)

$p=0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}88$

Aufgabe C 1.2

Anzahl der Versuche (1,5 VP)

$\sigma=\sqrt{n\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}=3\Leftrightarrow\frac{3}{16}n=9\Leftrightarrow n=48$

Begründung (1,5 VP)

Der Ansatz $n=9$ führt auf die Gleichung $\sqrt{9\cdot p\cdot(1-p)}=3\Leftrightarrow p\cdot(1-p)=1$.

Diese Gleichung besitzt keine Lösung.

Aufgabe C 2

a) Wahrscheinlichkeit Ereignis A (1 VP)

X: Anzahl der entnommenen Kugeln mit der Aufschrift „$+1$“, X ist $B_{100;0,35}$ -verteilt.

$P(X>35)=1-P(X\leq 35)\approx 0{,}454$

Wahrscheinlichkeit Ereignis B (1 VP)

$P(B)=0{,}35^3\approx 0{,}043$

b) Nachweis (1 VP)

Es ist $\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$, $\frac{25}{100}=\frac{5}{20}$ und $\frac{40}{100}=\frac{8}{20}$. Somit ist $n=20$ eine solche Anzahl.

c) Wahrscheinlichkeit (1 VP)

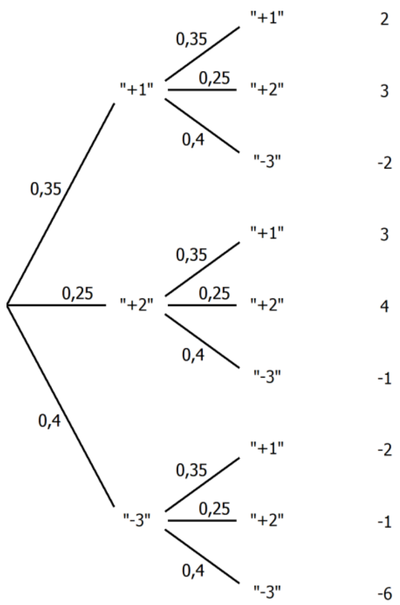
$$P(\text{"Spieler gewinnt mehr als 3 Euro"}) = P(\text{"+2","+2"}) = 0{,}25^2 = 0{,}0625$$

Nachweis (1,5 VP)

$$\begin{aligned} P(\text{"Spieler gewinnt"}) &= P(\text{"+1","+1"}) + 2\cdot P(\text{"+1","+2"}) + P(\text{"+2","+2"}) \\ &= 0{,}35^2 + 2\cdot 0{,}35\cdot 0{,}25 + 0{,}25^2 = 0{,}36 \end{aligned}$$

Durchschnittlicher Verlust (2 VP)

Gewinn/Verlust



X: Gewinn pro Spiel in Euro

k	–6	–2	–1
$P(X=k)$	$0{,}4^2$	$2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}35$	$2\cdot 0{,}25\cdot 0{,}4$

k	2	3	4
$P(X=k)$	$0{,}35^2$	$2\cdot 0{,}35\cdot 0{,}25$	$0{,}25^2$

$$\begin{aligned} E(X) = {} & -6\cdot 0{,}16 - 2\cdot 0{,}28 - 1\cdot 0{,}2 \\ & +2\cdot 0{,}1225 + 3\cdot 0{,}175 + 4\cdot 0{,}0625 = -0{,}7 \end{aligned}$$

Der durchschnittliche Verlust des Spielers beträgt auf lange Sicht 0,70 Euro pro Spiel.

d) Begründung 1 (1 VP)

Vor dem Hinzufügen der beiden Kugeln betrug die Anzahl der mit „$+1$“ beschrifteten Kugeln $0{,}35n$. Da eine mit „$+1$“ beschriftete Kugel hinzugefügt wurde, beträgt die Anzahl dieser Kugeln nun $0{,}35n+1$. Da die Gesamtzahl der Kugeln um zwei auf $n+2$ Kugeln erhöht wurde, ergibt sich für die genannte Wahrscheinlichkeit $\frac{0{,}35n+1}{n+2}$.

Begründung 2 (1,5 VP)

$$\frac{0{,}35n+1}{n+2} = \frac{0{,}35\cdot\left(n+\frac{1}{0{,}35}\right)}{n+2} = 0{,}35\cdot\frac{n+\frac{20}{7}}{n+2} = 0{,}35\cdot\frac{n+\frac{20}{7}}{n+\frac{14}{7}} > 0{,}35\cdot 1$$